1.א.

$$y = y' = y'' = e^x$$
$$(1-2x)e^x + 2e^x + (2x-3)e^x) = (1-2x+2+2x-2)e^x = 0 \cdot e^x = 0$$

ב.

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{W(x)}{y_1(x)^2}dx = e^x \int \frac{exp\left(-\int \frac{2}{1-2x}\right)}{e^{2x}}dx =$$
$$= \quad e^x \int \frac{e^{\ln(1-2x)}}{e^{2x}}dx = e^x \int (1-2x)e^{-2x}dx = e^x x e^{-2x} = xe^{-x}$$

שימו לב כי $1-2x > 0$ כאשר $x < \frac{1}{2}$.

ג.

$$y(x) = xe^{-x} \quad y' = e^{-x} - xe^{-x} \quad y'' = -2e^{-x} + xe^{-x}$$
$$(1-2x)\big(-2e^{-x} + xe^{-x}\big) + 2\big(e^{-x} - xe^{-x}\big) + (2x-3)xe^{-x} =$$
$$= \quad \big(-2 + x + 4x - 2x^2 + 2 - 2x + 2x^2 - 3x\big)e^{-x} = 0 \cdot e^{-x} = 0$$

ד. הפתרון הכללי הוא $y = c_1e^x + c_2xe^{-x}$
ולכן

$$y = c_1e^x + c_2xe^{-x} \quad y' = c_1e^x + c_1(e^{-x} - xe^{-x})$$
$$1 = y(0) = c_1$$
$$1 = y'(0) = c_1 + c_2 \to c_2 = 1$$
$$y = e^x + xe^{-x}$$

פתרון זה מוגדר עבור $x < \frac{1}{2}$ אבל כפונקציה קל להראות כי זה מוגדר על כל הישר וכמו בסעיפים א,ג, אפשר להראות ע"י הצבה ישירה כי הוא פתרון על כל הישר.

2.א.

$$
\begin{aligned}
&x = e^t \\
&r(r-1) - 2 = r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) \\
&e^{-t}, e^{2t} \\
&x^{-1}, x^2 \\
&y_H = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 \\
&y_p = c_1(x) x^{-1} + c_2(x) x^2 \\
&c_1' x^{-1} + c_2' x^2 = 0 \longrightarrow c_1' = -c_2' x^3 \\
&-c_1' x^{-2} + 2c_2' x = 1 \longrightarrow c_2' x^3 x^{-2} + 2c_2' x = 1 \longrightarrow c_2' = \frac{1}{3x} \\
&c_1' = -\frac{x^2}{3} \\
&c_1(x) = -\frac{x^3}{9} \quad c_2(x) = \frac{1}{3}\ln|x| \\
&y_p = -\frac{x^3}{9}x^{-1} + \frac{1}{3}x^2 \ln|x| = \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{3}\ln|x| \\
&y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{3}\ln|x| = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + \frac{x^2}{3}\ln|x|
\end{aligned}
$$

כיוון שתנאי ההתחלה הוא עבור $x = 1$ וכיוון שבפתרון הכללי יש $\ln|x|$ אז תחום ההגדרה של כל פתרון הוא החיוביים או השליליים ובגלל תנאי ההתחלה הוא החיוביים ולכן

$$
\begin{aligned}
&y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + \frac{x^2}{3}\ln x \quad x > 0 \\
&y'(x) = -c_1 x^{-2} + 2c_2 x + \frac{2}{3}x\ln x + \frac{x}{3} \\
&1 = y(1) = c_1 + c_2 \\
&1 = y'(1) = -c_1 + 2c_2 + \frac{1}{3} \\
&c_1 = \frac{4}{9} \quad c_2 = \frac{5}{9} \\
&y = \frac{4}{9}x^{-1} + \frac{5}{9}x^2 + \frac{x^2}{3}\ln x \quad x > 0
\end{aligned}
$$

ב.

$$y''' - 4y' = 0$$
$$r^3 - 4r = r(r^2 - 4) = r(r-2)(r+2)$$
$$y''' - 4y' = 3x$$
$$y_1 = x(a + bx) = ax + bx^2$$
$$y''' - 4y' = 10\cos x$$
$$y_2 = c\cos x + d\sin x$$
$$y_p(x) = y_1 + y_2 = ax + bx^2 + c\cos x + d\sin x$$

.3

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n + 3 a_n \Big) x^n = 0$$

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n + 3 a_n = 0 \quad n \geq 0$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-3) a_n}{(n+1)(n+2)} \quad n \geq 0$$

$$a_0 = y(0) = 0 \longrightarrow a_2 = \frac{(0-3) a_0}{(0+1)(0+2)} = 0 \longrightarrow a_{2n} = 0 \ n \geq 0$$

$$a_1 = y'(0) = 6 \rightarrow a_3 = \frac{(1-3) a_1}{(1+1)(1+2)} = -2$$

$$a_5 = \frac{(3-3) a_3}{(3+1)(3+2)} = 0 \longrightarrow a_{2n+1} = 0 \quad n \geq 2$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 6x - 2x^3$$

$$y' = 6 - 6x^2$$

$$y'' = -12x$$

$$y''' = -12$$

$$y'''(6) = -12$$

$$
\begin{aligned}
& y'' + 4y = 3\sin t\big(u_0(t) - u_{2\pi}(t)\big) = 3\sin t \cdot u_0(t) - 3\sin t \cdot u_{2\pi}(t) \\
& \mathscr{L}[y''](s) + 4\mathscr{L}[y](s) = 3\mathscr{L}[\sin t \cdot u_0(t)](s) - 3\mathscr{L}[\sin t \cdot u_{2\pi}(t)](s) \\
& s^2\mathscr{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) + 4\mathscr{L}[y](s) = \frac{3}{s^2+1} - 3e^{-2\pi s}\mathscr{L}[\sin(t+2\pi)](s) \\
& s^2\mathscr{L}[y](s) + 4\mathscr{L}[y](s) = \frac{3}{s^2+1} - 3e^{-2\pi s}\mathscr{L}[\sin t](s) = \frac{3}{s^2+1} - 3e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} \\
& (s^2+4)\mathscr{L}[y](s) = \frac{3}{s^2+1} - 3e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} \\
& \mathscr{L}[y](s) = \frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} - 3e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \\
& \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right) \\
& \mathscr{L}[y](s) = \frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)} - 3e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \\
= \quad & \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right) = \\
= \quad & \mathscr{L}[\sin t](s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin 2t](s) - e^{-2\pi s}\mathscr{L}[\sin t](s) + \frac{e^{-2\pi s}}{2}\mathscr{L}[\sin 2t](s) = \\
= \quad & \mathscr{L}[\sin t](s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin 2t](s) + e^{-2\pi s}\mathscr{L}[-\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t](s) = \\
= \quad & \mathscr{L}[\sin t](s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}[\sin 2t](s) + \mathscr{L}\left[u_{2\pi}(t)\left(-\sin(t-2\pi) + \frac{1}{2}\sin(2(t-2\pi))\right)\right](s) = \\
= \quad & \mathscr{L}\left[\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + u_{2\pi}(t)\left(-\sin(t-2\pi) + \frac{1}{2}\sin(2(t-2\pi))\right)\right](s) \\
& y(t) = \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + u_{2\pi}(t)\left(-\sin(t-2\pi) + \frac{1}{2}\sin(2(t-2\pi))\right) = \\
= \quad & \sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + u_{2\pi}(t)\left(-\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)
\end{aligned}
$$

5.א.

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}'_H = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}_H$$

$$p(r) = \det \begin{pmatrix} 4-r & -3 \\ 2 & -1-r \end{pmatrix} = (r-1)(r-2)$$

$$r = 1: \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to a = b \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r = 2: \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2a = 3b \to \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}_H = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}_p = c_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1'(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2'(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1'(t) = -2e^{-2t} \qquad c_2'(t) = e^{-3t}$$

$$c_1(t) = e^{-2t} \qquad c_2(t) = -\frac{1}{3} e^{-3t}$$

$$\overline{x}_p = e^{-2t} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} e^{-3t} e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ב. הפתרונות השואפים לאפס כאשר t שואף לאינסוף הם $e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, כלומר רק כאשר $c_1 = c_2 = 0$.
אין פתרונות השואפים לאפס כאשר t שואף למינוס אינסוף.